Wiederholungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie:

Aufgabe 1

In der Grafikprogrammierung verwendet man lineare Abbildungen, um Punkte, Strecken oder Polygonzüge zu transformieren. Hierbei sind häufige Transformationen die Translation[1], die Skalierung und die Rotation.

Die drei Transformationen haben allerdinge einen Schönheitsfehler: Eine davon lässt sich nicht durch eine Matrizenmultiplikation darstellen. Dies wird durch die Verwendung von homogenen Koordinaten beseitigt, mit denen alle Computergrafiksysteme arbeiten. Der Trick besteht darin, dass ein Raum in einen Raum mit einer höheren Dimension eingebettet wird (bspw. der $\mathbb{R}^2$in den $\mathbb{R}^3$).

1.1 Zeigen Sie, dass die Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Translationsmatrix ist, indem Sie den Punkt $P(1|2)$ mittels T linear transformieren und geben Sie an, um welchen Vektor der Punkt P verschoben wurde.

> Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in ein homogenes KOS:
> $$h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
> Die Umkehrabbildung ist definiert für $w \neq 0$:
> $$h^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$$

Eine Rotation wird durch $R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und eine Skalierung durch $S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in einem homogenen KOS erreicht.

Gegeben sei folgende lineare Abbildung: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2 Berechnen Sie das Produkt der drei Matrizen.

1.3 Gegeben sei das Dreieck ABC die den drei Punkten $A(1|2)$, $B(1|0)$ und $C(2|0)$. Zeichnen Sie die drei Punkte in ein Koordinatensystem und transformieren Sie die Punkte mittels der Matrix M.

1.4 Beschreiben Sie die Auswirkungen der Matrix M auf den Punkt $A(1|2)$.

Eine Transformation im $\mathbb{R}^3$ wird analog zu oben durchgeführt (durch Einbettung des $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^4$).

1.5 Geben Sie die Transformationsmatrix N als Produkt von Matrizen an, die einen Punkt im $\mathbb{R}^3$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschiebt, anschließend um die y-Achse um 30° rotiert, danach um die x-Achse um 50° rotiert und anschließend mit dem Faktor 1,5 gleichmäßig skaliert.

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene $E: x - 2z = 5$ im Punkt R.

1.6 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R.

1.7 Begründen Sie, dass der Punkt $A(2|3|0)$ und die Gerade h eine Ebene F festlegen und bestimmen Sie die Parameterform der Ebene F.

1.8 Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebenen E und F und den Schnittwinkel zwischen E und F.

1.9 Zeigen Sie, dass der Punkt A nicht auf der Ebene E liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene F.

[1] Verschiebung um einen Vektor.